Stochastic-Calculus-askerzzy

2024 年 2 月 6 日

在学习随机分析时的一些记录.

2021-4-30

老师, 您好！打扰您了, 我是研一的, 最近在看您讲的《随机分析及其应用》的书, 但是我在看第四章一个定理时, 有步骤实在搞不懂了, 冒昧地问您一下这个问题, 就是截图里标黄的部分。

意思是交叉项取完期望就是零了, 这里需要逆用重期望公式, 把那个交叉项写成条件期望的期望

$$
\begin{aligned}
& E\left(\int_0^T \Phi_t \mathrm{~d} B_t\right)^2=E\left[\sum_{i=0}^m \Phi_{s_i}\left(B_{t_i}-B_{s_i}\right)\right] \\
= & E\left[\sum_{i=0}^m \Phi_{s_i}^2\left(B_{t_i}-B_{s_i}\right)^2+2 \sum_{j<k} \Phi_{s_j} \Phi_{s_k}\left(B_{t_j}-B_{s_j}\right)\left(B_{t_k}-B_{s_k}\right)\right] \\
= & E\left[\sum_{i=0}^m E\left(\Phi_{s_i}^2\left(B_{t_i}-B_{s_i}\right)^2 \mid \boldsymbol{B}_{s_i}\right)\right. \\
& \left.+2 \sum_{j<k} E\left(\Phi_{s_j} \Phi_{s_k}\left(B_{t_j}-B_{s_j}\right)\left(B_{t_k}-B_{s_k}\right) \mid \boldsymbol{B}_{s_j}\right)\right] \\
= & E\left[\sum_{i=0}^m \Phi_{s_i}^2 E\left(\left(B_{t_i}-B_{s_i}\right)^2 \mid \boldsymbol{B}_{s_i}\right)\right. \\
& \left.+2 \sum_{j<k} \Phi_{s_j}\left(B_{t_j}-B_{s_j}\right) E\left(\Phi_{s_k}\left(B_{t_k}-B_{s_k}\right) \mid B_{s_j}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&E\left[\sum_{i=0}^{m}\Phi_{s_i}^2 E\left(B_{t_i}-B_{s_i}\right)^2\right.\\
&\left.+2\sum_{j<k}\Phi_{s_j}\left(B_{t_j}-B_{s_j}\right)E\left(\Phi_{s_k}\left(\left(B_{t_k}-B_{s_k}\right)\mid \boldsymbol{B}_{s_k}\right)\boldsymbol{B}_{s_j}\right)\right]\\
=&E\left[\sum_{i=0}^{m}\Phi_{s_i}^2\left(t_i-s_i\right)\right]=\sum_{i=0}^{m}E\Phi_{s_i}^2\left(t_i-s_i\right)=\sum_{i=0}^{m}\left\|\Phi_{s_i}\right\|^2\left(t_i-s_i\right).
\end{aligned}
$$

技巧就类似这里的第三四行, 这个微信上写起来基本是说不明白的, 你要还看不懂周一上午十点半可以去 C814 找我。

——-

Theorem 4.14

If g is a bounded continuous function and $\{t_i^n\}$ represents partitions of $[0,t]$, then for any ${}_i^n \in (B(t_i^n), B(t_i^{n+1}))$, the limit in probability

$$\lim\sum_{i=0}^{n-1} g(\theta_i^n)(B(t_{i+1}^n)-B(t_i^n))^2=\int_0^t g(B(s))ds$$

Note that the Smooth propery $\mathbb{E}[\mathbb{E}[x|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1]=\mathbb{E}[x|\mathcal{G}_1]$, if $\mathcal{G}_1\subset\mathcal{G}_2$. Particularly, note that $\mathbb{E}[\mathbb{E}[x|\mathcal{G}]]=\mathbb{E}[x]$.

Partial proof

With $\Delta B_i=B(t_i^{n+1})-B(t_i^n)$ and $\Delta t_i=t_i^{n+1}-t_i^n$, by using conditioning it is seen that the cross-product term in the following expression vanishes and

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)\right)^2 \tag{1}$$

$$=\mathbb{E}\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))\mathbb{E}(((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)^2|\mathcal{F}_{t_i}) \tag{2}$$

$$=2\mathbb{E}\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_i^n))(\Delta t_i)^2 \tag{3}$$

$$\leq \delta 2\mathbb{E}\sum_{i=0}^{n-1} g^2(B(t_n^i))\delta t_i \to 0 \text{ as } \delta\to 0 \tag{4}$$

Remark

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1} g(B(t_i^n))((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)\right)^2 \tag{5}$$

$$=\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left[g(B(t_i^n))^2((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)^2\right]\right. \tag{6}$$

$$\left.+2\sum_{j<k}\left[g(B(t_j^n))g(B(t_k^n))((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right]\right) \tag{7}$$

$$=\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\left[\left[g(B(t_i^n))^2((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)^2\right]|\mathcal{F}_{\sqcup_\rangle}\right]\right. \tag{8}$$

$$\left.+2\sum_{j<k}\mathbb{E}\left[\left[g(B(t_j^n))g(B(t_k^n))((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\right) \tag{9}$$

$$=\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left[g(B(t_i^n))^2\mathbb{E}\left[\left[((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)^2\right]|\mathcal{F}_{\sqcup_\rangle}\right]\right]\right. \tag{10}$$

$$\left.+2\sum_{j<k}\left[g(B(t_j^n))((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)\mathbb{E}\left[\left[g(B(t_k^n))((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\right]\right) \tag{11}$$

$$=\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left[g(B(t_i^n))^2\mathbb{E}\left[((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)^2\right]\right]\right. \tag{12}$$

$$\left.+2\sum_{j<k}\left[g(B(t_j^n))((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)\mathbb{E}\left[\left[g(B(t_k^n))((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\right]\right) \tag{13}$$

$$\tag{14}$$

Cause $((\Delta B_i)^2-\Delta t_i)^2$ is not related with $\mathcal{F}_{t_i}$.

Due to the smooth property, we have

$$2\mathbb{E}\left[\sum_{j<k}\mathbb{E}\left[\left[g(B(t_j^n))g(B(t_k^n))((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \tag{15}$$

$$=2\mathbb{E}\left[\sum_{j<k}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\left[g(B(t_j^n))g(B(t_k^n))((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right]|\mathcal{F}_{t_k}\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \tag{16}$$

$$=2\mathbb{E}\left[\sum_{j<k}\mathbb{E}\left[g(B(t_j^n))g(B(t_k^n))((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)\mathbb{E}\left[\left[((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right]|\mathcal{F}_{t_k}\right]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \tag{17}$$

$$\mathbb{E}\left[\left[((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)\right]|\mathcal{F}_{t_k}\right]=\mathbb{E}[((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)]=0 \tag{18}$$

$$=2\mathbb{E}\left[\sum_{j<k}\mathbb{E}\left[g(B(t_j^n))g(B(t_k^n))((\Delta B_j)^2-\Delta t_j)\mathbb{E}[((\Delta B_k)^2-\Delta t_k)]|\mathcal{F}_{t_j}\right]\right] \tag{19}$$

$$=0 \tag{20}$$

2021-7-10

定理 1.3.2 严测度论

如果 $\mathscr{Q}$ 是半环, 则

$$r(\mathscr{Q})=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\bigcup_{k=1}^{n}A_k:\{A_k\in\mathscr{Q},k=1,\cdots,n\}\text{两两不交}\right\}.$$

定理 1.3.2 为什么环对有限并封闭能推出后面的结论啊？1.3.1 右边的定义是一个可列并吧？

———

不是,1.3.1 是所有有限并的全体

———

所以是, 任意有限并是属于生成的环的

2021-9-22

老师,a.e 和 a.s. 有什么区别吗？我见有论文里, 连起来写？$a.e.,a.s.$

前者分析用的多, 后者概率用的多, 一起用是为了区分概率空间和一般测度空间。

比如同时涉及到 Lebesgue 积分和 Ito 积分的情况, 前者用 a.e., 后者用 a.s., 但其实没有绝对的分别, 只有作者之间的约定

—–

2021-9-27

(2) 存在充分大的 N 使 $\sum_{n=N+1} \mu\left(B_n\right)<\varepsilon/2$, 从而

$\tau A \mid \left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)\Big) \leqslant \tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)\Big)$ （ τ 有单调性)

$$\leqslant \tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)-\tau\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)$$

($\sigma(\mathscr{A})$ 上测度 τ 有可减性)

$\leqslant \tau\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right)$

(因为 $\tau\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leqslant \tau\left(\bigcup_{n=1}^N B_n\right)+\tau\left(\bigcup_{n=N+1}^{\infty} B_n\right)\Big)$

课本上这（2）这个证明为什么需要单调可减来证明啊？43 页上, 我是想, 不能直接减掉前 N 个集合, 等号过来吗？

—–

因为这里通篇都少写了一个字,tau 是外测度, 只有单调性和次可列可加

—–

2021-11-3

1. 老师, 今天早上您讲习题里面, 有个集合运算的步骤, 我一直犯迷糊。要证明

$$\{f_n+g_n \leq x\} \subset\{f_n \leq x+\epsilon\} \cup\{g_n \leq-\epsilon\}$$

即证明

$$if \omega \in\{f_n+g_n \leq x\}, then \omega \in\{f_n \leq x+\epsilon\} \cup\{g_n \leq-\epsilon\}.$$

—–

是后面能推前面, 前面推不出后面, 所以是真子集

说白了,$\{f(x)<0\}$ 和 $\{f(x)<1\}$ 谁能推出谁, 谁是谁的子集

—–

这里,$\{f_n+g_n \leq x\}$ 指的是原像。

2. 这里为什么, 可以这么定义或者记号, 两个随机微分的积等于这两个 ito 过程的二次变差的随机微分？example 4.18

—–

这就是记号, 之后会讲到, 在进行复杂运算时候这些是对的, 但是它们理论上只能存在于积分号里面

——

2021-11-9

老师, 早上您讲的,L2 适应过程的 Ito 积分的那个反例。

这个反例是不是恰好说明了, 如果 f 连续, 那么 f(Bt) 连续, 它的 Ito 积分存在, 并且具备前两条线性性质。但是不一定具备零均值、Ito 等距性质。

因为我看书上的推论 4.4, 只是说连续适应过程的 Ito 积分存在, 没有说满足二阶矩条件。

而且, 两个正面的例题,e^t 和 t 情况时, 都有先验证二阶矩条件。感觉不知道我哪里理解错了....

——-

二阶矩条件是额外的, 这里应该先写有 1-2, 然后有二阶矩条件才有 3-4

这里推论写多了, 书上证明不对

——-

哦哦, 是不是这样的, 老师。

这个推论 4.1.2:“且具备性质 1-4" 改成”具备 1-2, 若有二阶矩条件, 又有性质 3-4 “

2021-11-30

老师, 上次您最后讲的那个例题。

假设的是 $P(B_\tau = b) = p$, 然后最后解出来的是 $p = \frac{(x-a)}{(b-a)}$。这样是不是到达 a 之前, 先到 b 的概率?

—-

yes

—-

2021-12-3

老师, 求助您一个画图的问题...

带跳的我还是稀里糊涂的, 我想用欧拉法简单的迭代算个样本路径, 跳跃部分实在不知道怎么算好了....

$$dX(t) = f(X(t),t)dt + g(X(t),t)dB(t) + \int_{|z|\leq 1} H(X(t-),t-,z)\tilde{N}(dt,dz)$$

Euler meathod

$$X(t_{n+1}) = X(t_n) + f(X(t_n),t_n)\Delta t + g(X(t_n),t_n)\Delta B(t) + \int_{|z|\leq 1} H(X(t-),t-,z)\tilde{N}(\Delta t,\Delta z)$$

the last intergral term maybe write as $\Delta\tilde{N}(dt,dz)$??

the last intergral term is a compound poisson process? (No, 2022-10-2, if $0<|z|$, then it is a compound poisson process.)

Yang Ning's wrong (-: (-: (-:

$\tilde{N}(\Delta t,\Delta z)\sim Pois(\nu(\Delta z)\Delta t)$??, so we can get the random number V_Z.

refence to Zhu: $\nu(dz)=\frac{dz}{1+|z|^2}$

then $\int_{|z|<1}H(X(t-),t-,z)V_z\frac{dz}{1+|z|^2}$??

in all, amazing wrong steps and meathod.....

—

数值这方面我也不是很熟, 但是我觉得带跳的部分应该不容易模拟, 因为小跳和连续的在数值方面难以区分,

大跳的部分和连续的部分倒是好说

—

我是这个跳跃部分, 这个复合泊松过程不知道怎么想好...

A sample path of this process is generated as follows:

1. generate a path of the Markov chain, i.e. a set of switching times $\tau_0=0,\tau_1,\ldots,\tau_{L+1}=T$ and the corresponding states $\alpha(t)=\alpha_k\in\mathcal{S},k=1,\ldots,L$.

2. gencrate the jump times v_{k_j}, of the Poisson process in cach interval $[\tau_k,\tau_{k+1})$ according to the intensity $\lambda\alpha_k$ and let N_k be the number of jumps;

3. for any $k=0,\ldots,L$ generate N_k i.i.d. samples $Y(\alpha(v_{k_j}),j=1,\ldots N_k$ distributed according to the probability $m(\alpha_k,dy)$;

4. on a given time grid $t_0,\ldots,t_n$ of $[0,T]$ built as the superposition of a deterministic grid and the jump times v_j, let $X(t_0)=0$ and

$$X(t_{i+1})=X(t_{i+1}-)+\int_E\gamma(y,\alpha(t_{i+1}))p(dy,t_{i+1})$$

If t_{i+1} is actually a point of the Poisson random measure, the magnitude of the jump is sampled, that is

$$\int_E\gamma(y,\alpha(t_{i+1}))p(dy,t_{i+1})=\gamma(Y(\alpha(t_{i+1}),\alpha(t_{i+1}))$$

otherwise the jump ternm is zero.

—— 复合泊松的应该能模拟, 但是我觉得这事微信上说不明白, 得画画图什么的

主要是我确实不知道数值方面的操作, 我是做纯理论的

——

end at 22:32.

2021-12-13

老师您好, 打扰您了。

半鞅带跳的部分还有些问题请教您。

在课本的 246 页,8.14, 半鞅的典型分解, 随机测度这个概念一直没搞清楚, 之前一直问您 Levy 型式的 Ito 公式好像就是这个

原因, 我不会把不连续半鞅的 Ito 公式跳跃部分写成积分形式。

书上定义这部分符号好像我也没太弄明白, 我大体的写了写,

麻烦张老师您看一下。

$$\mu(\omega, A) = \mathbf{I}_A(\xi(\omega)) = \mathbf{I}(\xi(\omega) \in A).$$

给出的 μ 的定义, 类似于 $\xi(\omega)$ 的分布函数, 有 $\int_\Omega \xi(\omega)dP = \mathbf{I}(\xi(\omega) \in A) = \mu(\omega, A)$. 错的离谱...

—-

这不是类似分布函数, 是类似密度函数, 所以你先求积分得到概率, 再求才得到期望

$E\mathbf{I}(\xi(\omega) \in A) = P(\xi(\omega) \in A)$.

说明测度论理解不到位, 或者中间缺一段高等概率论, 概念还认识不到位, 去看看那本《概率与测度》

其实这些都是简单概念的堆叠, 但是简单概念理解不好, 复杂的就没法下手

—-

嗯嗯, 学测度论时期望、条件期望这些概念没搞清楚, 符号测度那章也是

Random measure for a single jump

2022-7-10

老师, 打扰您了, 问您个问题。

下边这个引理, 说的是有限时间内, 跳的次数有限吗?

Lemma 2.3.4 If A is bounded below, then $N(t, A) < \infty (a.s.)$ for all $t \geq 0$.

—-

是说有限时间内进入 A 的次数有限

—-

那这个引理, 说 for all t>=0, 是不是有些不合适, 张老师

还是说, 一般这样默认 t 有限, 不取无穷

—–

这么写大部分时候应该不认为 t 能取无穷但是有些书可能不一样

—–

2022-7-22

老师, 不好意思晚上打扰了。我最近几个概念搞得懵了, 还是想问您下 levy 测度的一个问题。

如果给出 lévy measure $L(du) = du/(1+u^2)$ 或者 $L(du) = du/(u^{4/3})$, 如何根据这个 lévy measure 获得单位时间 δt 内的跳跃幅度?

是直接积分吗？感觉不太对, 比如：

$$\delta t \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} L(du)$$

还是不太理解, 这个概念, 所以已知也不清楚 Lipschitz 条件为什么这么给？

—–

你从头学过 levy 过程么？

—–

上面好像是槽点有点多, 就是最近懵的很了我有大致翻过这本书, 或者你看看这本书的 overview

—-

那你知道怎么积分能得到 levy 过程吧

—-

嗯嗯,levy-ito 分解和后面的 poisoon 积分我都有看

我考虑的是带跳的 SDE, 跳跃项用 poisson integer 表示, 例如

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(X(t), X(t-\tau(t)), t, r(t))dt \\ &\quad + g(X(t), X(t-\tau(t)), t, r(t))dB(t) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} h(X(t^-), X((t-\tau(t))^-), t^-, r(t^-), u)\tilde{N}(dt, du) \end{aligned}$$

考虑的 lévy measure $L(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \infty$, 例如 $L(du) = du/(u^{4/3})$。上一次有问张老师您一个引理, 引理说明, 这种无限的测度有限时内会有无穷的小跳。

我的问题是：

我做一条这种模型的样本路径, 对于跳的部分是一个复合 Poisson, 我平时读的文献一般是给出有限的参数 λ, 并且给出复合 Poisson 对应的 i.i.d. 的 r.v. 的分布。

现在, 我遇到的情况是：给出了, 例如 $L(du) = du/(u^{4/3})$ 的表示。参数是 $\lambda = L(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \infty$ 的, 并且复合 Poisson 对应的 i.i.d. 的 r.v. 的分布, 我也不知道是什么了？

对于,$\lambda = L(\mathbb{R}\backslash\{0\}) < \infty$ 的情况, 例如 $L(du) = du/(1 + u^2)$, 我有看这个讲义, 但是, 我还是不知道怎样推到 $\lambda = L(\mathbb{R}\backslash\{0\}) = \infty$ 的情况。

———————

如果给出 lévy measure $L(du) = du/(1 + u^2)$ 或者 $L(du) = du/(u^{4/3})$, 如何根据这个 lévy measure 获得单位时间 δt 内的跳跃幅度?

是直接积分吗？感觉不太对, 比如：

$$\delta t \int_{\mathbb{R}\backslash\{0\}} L(du)$$

———————-

“Suppose that an infinitely divisible probability measure is such that its Lévy measure ν is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure. We write $g_\nu = d\nu/dx$ and call it the Lévy density .

For example, a compound Poisson random variable (as given in Example 1.2.10) will have a Lévy density if and only if each Z_j has a pdf. In this case, we see that $g_\nu = cf_Z$ where f_Z is the common pdf of the Z_js.”

———————-

有连续随机变量 X,X 的累积分布函数 $Y = F(X)$ 也是连续函数, 那么函数值 Y 也是一个随机变量, 且 Y 是均匀分布.

https://www.cnblogs.com/dohkoai/p/14629651.html

——————————————-

“5.1.2 Euler Scheme We now construct the Euler scheme for (5.13).” ([Jum, p. 103](zotero://select/library/items/4CBEFA6D)) ([pdf](zotero://open-pdf/library/items/Q8LXIW6L?page=103))

$$
\begin{aligned}
Y(t_{n+1}) =& Y(t_n) + \sigma Y(t_n)\Delta B_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{|z|>c} Y(t_n) z N(dz, ds) \\
=& Y(t_n) \left(1 + \sigma \Delta B_n + \sum_{k=N^c(t_n)+1}^{N^c(t_{n+1})} V_k \right)
\end{aligned}
$$

The jump coefficient is linear with respect to 'z', if it is nonlinear, for example z^2, it is not correct.??

——————————- Forward, or explicit, Euler-Maruyama scheme. N^* is either a CPoPr or a CCPoPr.

This scheme is presented in e.g. [13, Page 305]. A slight generalization, including dN^*, gives

$$
x_{n+1} = x_n + (t_n, x_n)\Delta t + \sigma(t_n, x_n)\ W_n + (t_n, x_n)\ N_n^*(, N)
$$

——————————-

Simulating the Merton JD process

1. The increments of the Poisson process are independent and follow a Poisson distribution with rate (Δt);

2. conditioned on the number of jumps occurred between t_j and t_{j+1}, the sum of the jump severities is Gaussian with given mean and variance.

Hence, the simulation algorithm can be organized as follows.

1. Simulate the continuous part of the JD diffusion process, i.e. the ABM, on the given time partition.

2. Simulate the number of jumps occurring between t_j and t_{j+1}, i.e. $N \sim Poi((tj, tj+1))$.

3. Generate $Z\ N(0,1)$; set $J = ZN + Z\sqrt{N}Z$.

4. Sum the ABM and J.

——————————

For case $L(du) = du/(1+u^2)$, $L(R) = \pi$ we get Poisson intensty.

1. Simulate the number of jumps occurring between t_j and t_{j+1}, i.e. $N \sim Poi(\pi(t_{j+1} - t_j))$.

2. Generate jump size: Z's pdf is $\frac{1}{1+u^2}/\pi$; Set $J = N * Z$

——————————

Variance Gamma process

Lévy density

$$g_\nu(x) = a|x|(e^{\sqrt{2bx}}(-\infty, 0)(x) + e^{-\sqrt{2bx}}(0, \infty)(x))$$

1. Simulate the increments from tj to tj+1 of the Gamma clock, i.e. G ((tj+1 tj)/k, 1/k).

2. Generate Z N (0, 1); set X = G + GZ.

Gamma law $\Gamma(\delta t/k, 1/k)$

where $a = \delta t/k, b = 1/k$.

———————————

对于 $L(du) = du/(u^{4/3})$, $L(R\backslash\{0\}) = \infty$

———————————-

$$\int_{|y|<1} f(X(t), y)\nu(dy)$$

A: 转移概率--程, 或者算子半群–levy calculus chapter3(需要“Functional Analysis”Yosida (1995)"]), 与 skorhod’s representated 或许有关

————————

Sample path properties are discussed e.g. in Sato’s Lévy processes and infinitely divisible distributions, Section 21. For example, the following results are given there:

Sample functions of X are a.s. continuous if and only if =0.

Sample functions of X are a.s. piecewise constant if and only if X is compound Poisson or a zero process.

If (Rd)=, then a.s. jumping times are countable and dense in [0,); if 0<(Rd)<, then a.s. jumping times are countable in increasing order and the first jumping time has an exponential distribution with mean 1/(Rd). In this latter case, the process J(t) of jumps in [0,t) is a Poisson process with intensity measure (Rd), so the number of jumps in [0,t) has a Poisson distribution with mean t(Rd).

Tu, the first time the process jumps by more than u, has an exponential distribution with mean 1/c if $\int_{D(u,\infty)}(dx) = c < \infty$, where D(u,)=xRd:u<||x||<.

———————

This shows that a Lévy process can be represented by a compound Poisson process if and only if its L evy measure is finite.

If A is bounded below, then $\int_A f(u)\pi(du)$ is a compound poisson process.

——

$\{x|f(x) \neq 0\}$ 的闭包成 f 的支撑 $supp(f)$, 如果是紧集, 紧支撑。