Uniform-convergence

2024 年 2 月 6 日

一致收敛与点点收敛

1. 数的收敛：$a_n \to a$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, s.t. |a_n - a| < \epsilon$$

2. 推广到 $\mathbb{R}^n$ 中收敛 (functional) $X_n \to X_0$, where $X_0 = (x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n)$

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, s.t. |x_n^k - x_0^k| < \epsilon, k = 1, 2, \ldots, n$$

对于每个 k，找到相同的 N 意味着一致性。

3. 再推广到函数空间中的向量（不可列维度的）收敛，$f_n n(X) \to f(X)$，每个 X 的作为一个维度。因为有无限维，有可能找不到统一的 N，使得 $|f_n(X) - f(X)| < \epsilon$，对 X 一致成立。

定义

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, s.t. |f_n(X) - f(X)| < \epsilon, \forall x \in \mathbb{D}$$

逐点收敛

$$\forall x \in \mathbb{D}, \forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, s.t. |f_n(X) - f(X)| < \epsilon$$

有限维时，“每个维度都收敛”和“所有维度都一致收敛”是不区分的。

例，逐点收敛但不一致收敛

$$f_n(X) = X^n, f(X) = 0, X \in [0, 1)$$